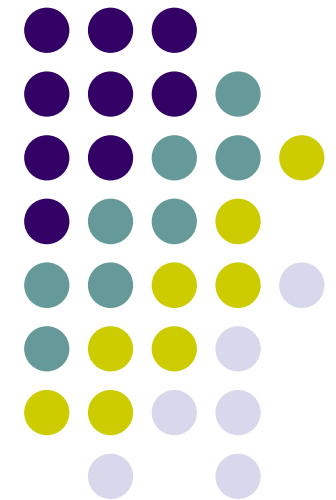


Poliedros y simetría

XIII Seminario ESTALMAT

17 de Abril de 2021

Francisco Santos
Universidad de Cantabria



Introducción



- Sesión con alumnos/as de primer curso.
Tres horas (los primeros años, 3 + 3)
- Material: polydron (alumnos y profesor), manualidades con papel, figuras preconstruidas (profesor).
- Objetivo: entender el concepto de simetría como “transformación que deja invariante a un objeto”, incluyendo su “manipulación algebraica”.
- Se estudian los poliedros regulares, pero más como ejemplo de objetos con simetrías que per-se.

¿Qué es simetría?



- Plantear la pregunta y escuchar/discutir/comentar sus respuestas
- Pequeña búsqueda en internet → varios tipos de simetría
- ¿Qué tienen en común? Repetición de un patrón, “ser igual cuando lo miramos de diferentes sitios”, → invariancia frente a un “movimiento” o “transformación”.

Simetrías de un objeto: maneras de “moverlo” o reubicarlo, pero que quede igual que estaba

Clasificación de simetrías en el plano



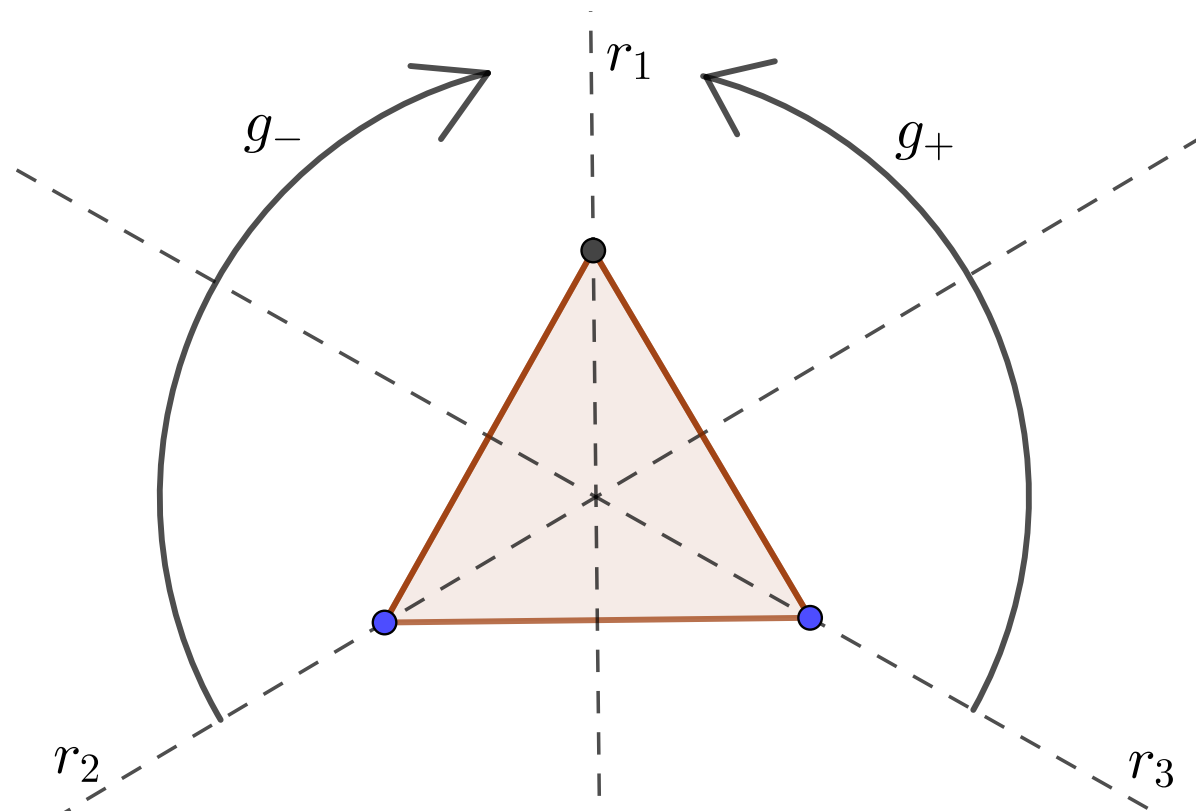
- Simetría bilateral / reflexión
- Simetría central / simetría radial / rotación
- Traslación (vía del tren, valla, ...)
- “Otros” (espiral, reflexión con deslizamiento, helicoidal en el espacio)

Simetrías en los polígonos regulares



- Simetrías directas (rotaciones) / indirectas (reflexiones, necesitamos “sacar” el polígono del papel / pizarra, y darle la vuelta)
- El mismo número de rotaciones que de reflexiones (¿el mismo número? Solo si contamos la “rotación nula”).
- Si al polígono le hacemos una simetría y luego otra, el resultado es el mismo que el de haber hecho una tercera: podemos **multiplicar simetrías**.

“Tabla de multiplicar” de simetrías del triángulo equilátero

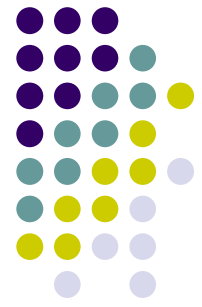


“Tabla de multiplicar” de simetrías del triángulo equilátero



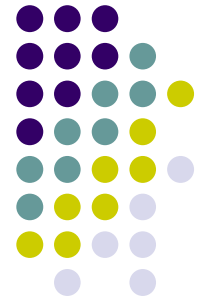
	U	g+	g-	r1	r2	r3
U						
g+						
g-						
r1						
r2						
r3						

“Tabla de multiplicar” de simetrías del triángulo equilátero



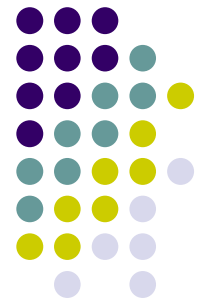
	U	g+	g-	r1	r2	r3
U	U	g+	g-	r1	r2	r3
g+	g+					
g-	g-					
r1	r1					
r2	r2					
r3	r3					

“Tabla de multiplicar” de simetrías del triángulo equilátero



	U	g+	g-	r1	r2	r3
U	U	g+	g-	r1	r2	r3
g+	g+		U			
g-	g-	U				
r1	r1			U		
r2	r2				U	
r3	r3					U

“Tabla de multiplicar” de simetrías del triángulo equilátero



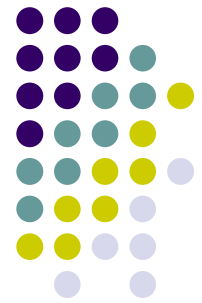
	U	g+	g-	r1	r2	r3
U	U	g+	g-	r1	r2	r3
g+	g+	g-	U			
g-	g-	U	g+			
r1	r1			U		
r2	r2				U	
r3	r3					U

“Tabla de multiplicar” de simetrías del triángulo equilátero



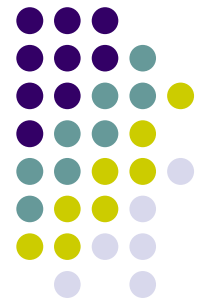
	U	g+	g-	r1	r2	r3
U	U	g+	g-	r1	r2	r3
g+	g+	g-	U			
g-	g-	U	g+			
r1	r1			U	g+	g-
r2	r2			g-	U	g+
r3	r3			g+	g-	U

“Tabla de multiplicar” de simetrías del triángulo equilátero



	U	g+	g-	r1	r2	r3
U	U	g+	g-	r1	r2	r3
g+	g+	g-	U	r3	r1	r2
g-	g-	U	g+	r2	r3	r1
r1	r1			U	g+	g-
r2	r2			g-	U	g+
r3	r3			g+	g-	U

“Tabla de multiplicar” de simetrías del triángulo equilátero



	U	g+	g-	r1	r2	r3
U	U	g+	g-	r1	r2	r3
g+	g+	g-	U	r3	r1	r2
g-	g-	U	g+	r2	r3	r1
r1	r1	r2	r3	U	g+	g-
r2	r2	r3	r1	g-	U	g+
r3	r3	r1	r2	g+	g-	U

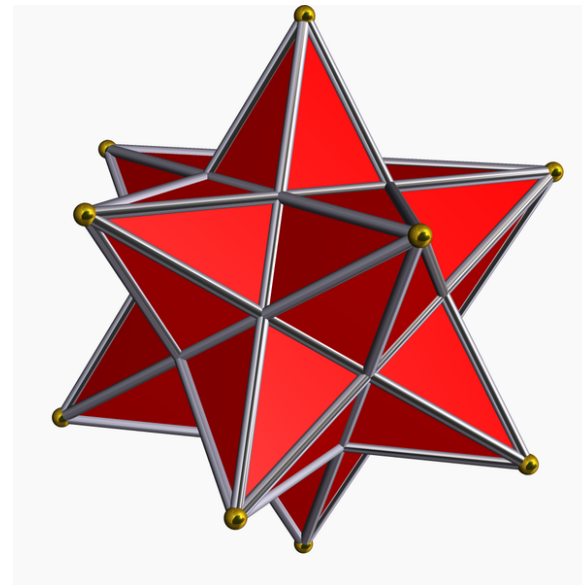
Poliedros



Un poliedro es una figura tridimensional delimitada por caras planas (polígonos).



Poliedro convexo

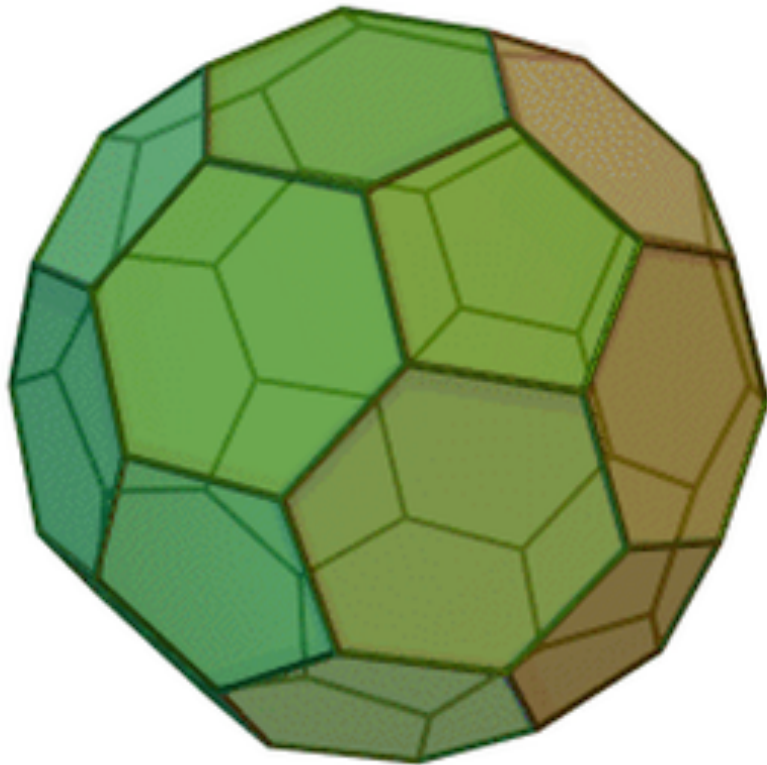


Poliedro no convexo

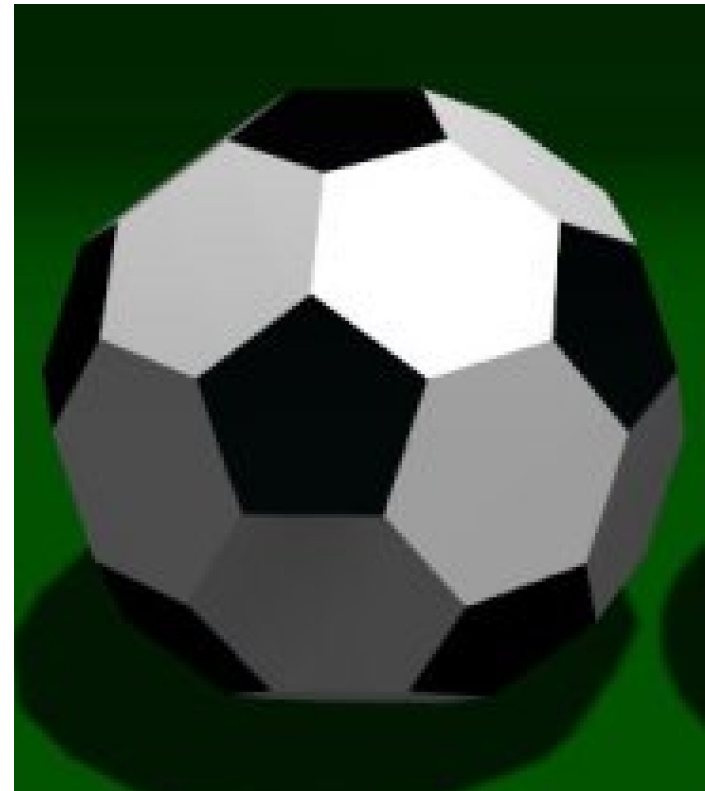
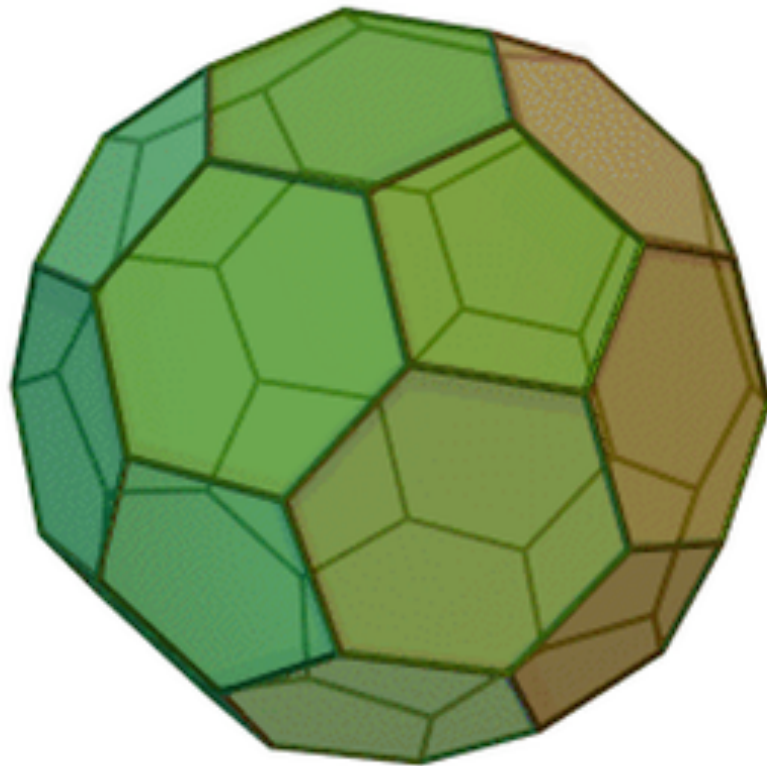
Algunos poliedros famosos



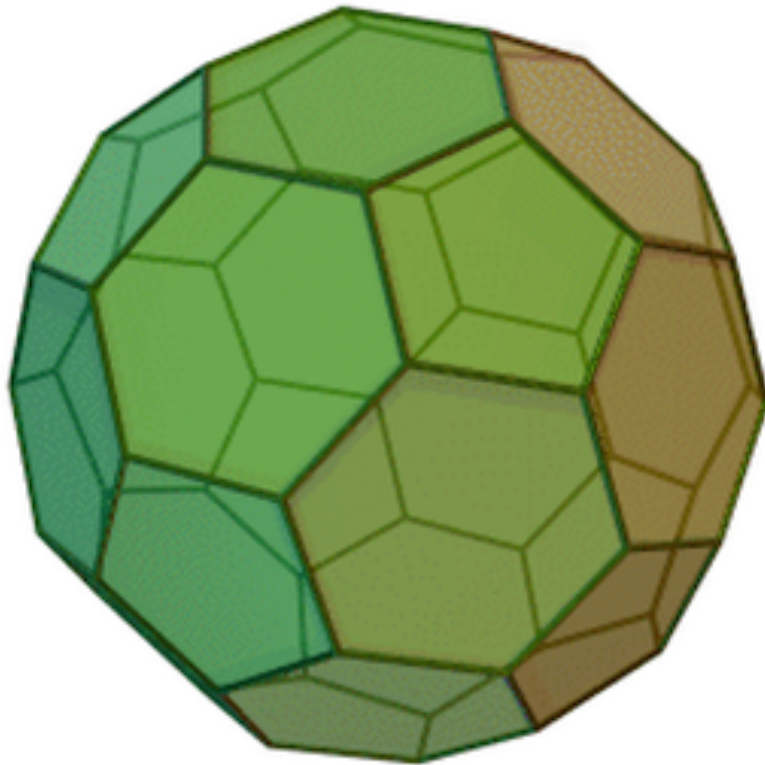
El icosaedro truncado



El icosaedro truncado



El icosaedro truncado

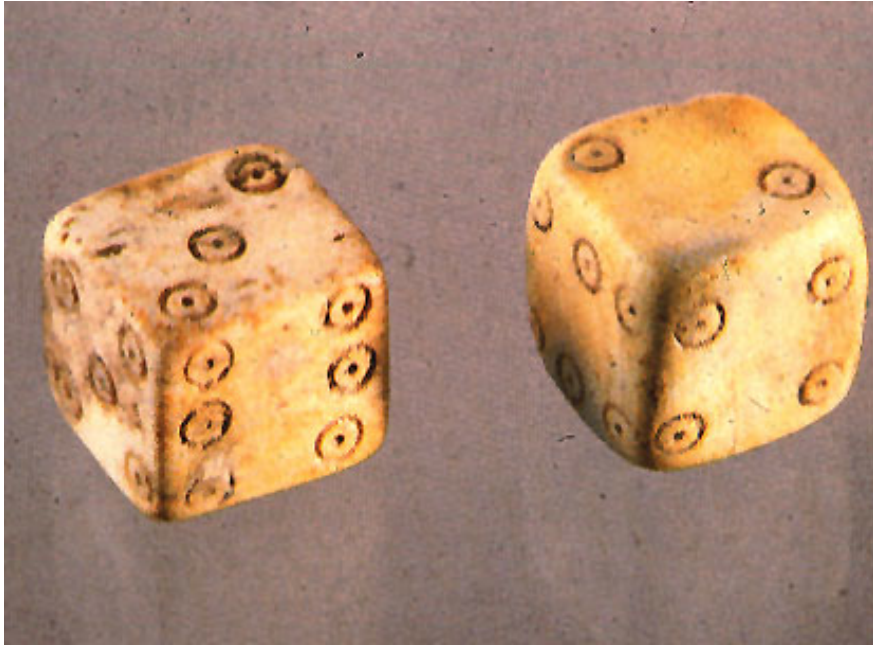




La piramide cuadrada



El cubo



Poliedros regulares



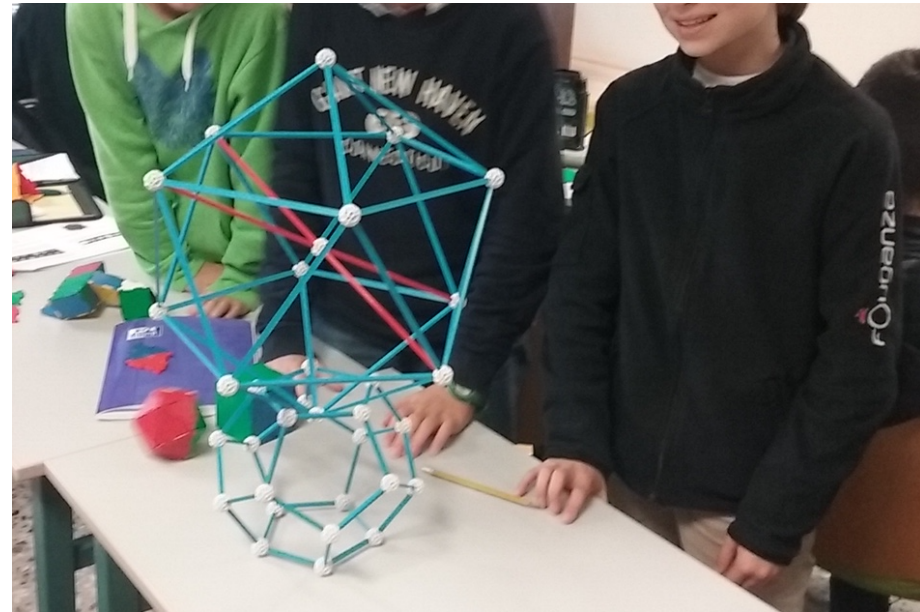
Con polydron (reparto unos 15 triángulos a cada uno).

- Construir un tetraedro o “pirámide triangular”
- Construir un octaedro o “doble pirámide cuadrada”

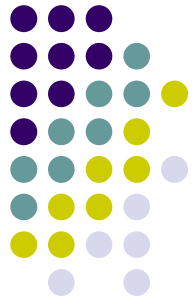
Contamos vértices, aristas y caras

Son objetos con “muchas simetrías”. Buscamos unas cuantas.

Poliedros regulares



Poliedros regulares



¿Qué es un poliedro regular?

¿"Caras iguales y regulares"? No es suficiente. Hace falta que haya el mismo número en cada vértice

Lo que hace regular a un poliedro son sus simetrías: hay simetrías que mandan cualquier vértice sobre cualquier otro, y cualquier cara sobre cualquier otra.

¿Qué poliedros regulares hay?

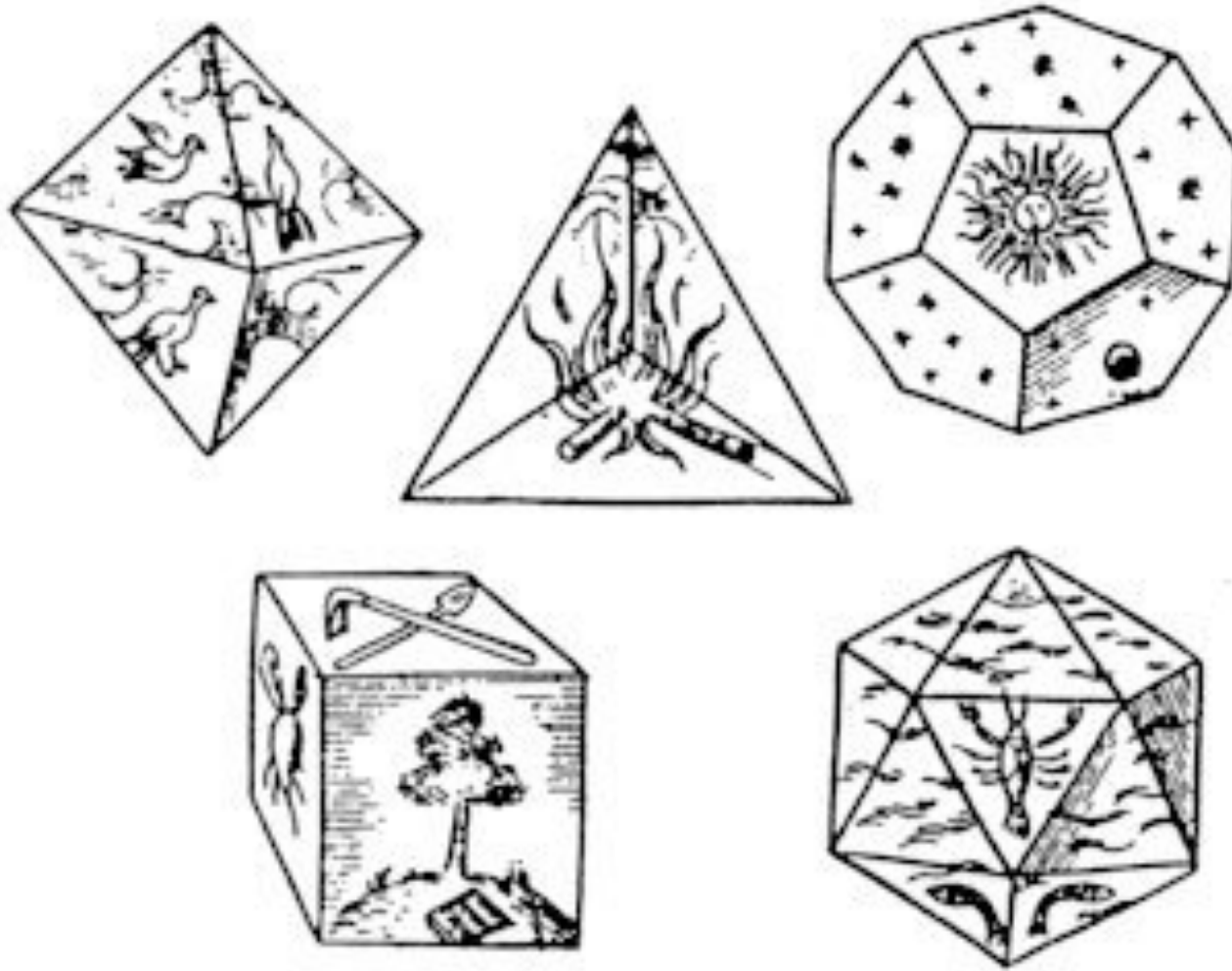


Con polydron es muy fácil darse cuenta de que:

- Si queremos construir un poliedro regular con triángulos, hay que juntar 3, 4 o 5 en cada vértice.
- Con cuadrados, 3 en cada vértice.
- Con pentágonos, 3 en cada vértice.
- Con polígonos de más de cinco lados → imposible

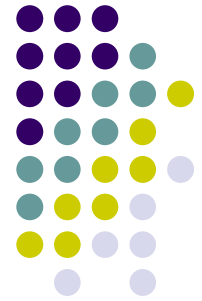
Solo hay cinco poliedros regulares: **tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro, y dodecaedro**

Los “sólidos platónicos”



Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, 1596

Caras, vértices, aristas (y demás familia)

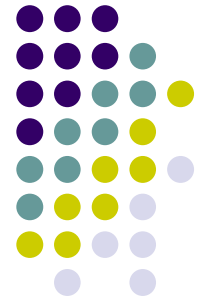


	p	q	V	A	C				
tetraedro									
cubo									
octaedro									
dodecaedro									
icosaedro									

p = qué cara uso (triángulos = 3 / cuadrados = 4 / pentágonos =5)

q = cuántas caras (o aristas) en cada vértice

Caras, vértices, aristas (y demás familia)

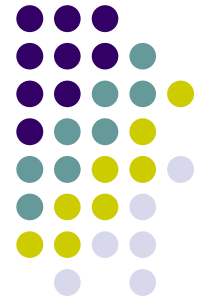


	p	q	V	A	C				
tetraedro	3	3							
cubo	4	3							
octaedro	3	4							
dodecaedro	5	3							
icosaedro	3	5							

p = qué cara uso (triángulos = 3 / cuadrados = 4 / pentágonos =5)

q = cuántas caras (o aristas) en cada vértice

Caras, vértices, aristas (y demás familia)

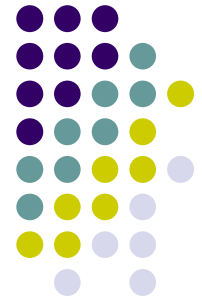


	p	q	V	A	C				
tetraedro	3	3	4	6	4				
cubo	4	3	8	12	6				
octaedro	3	4	6	12	8				
dodecaedro	5	3	20	30	12				
icosaedro	3	5	12	30	20				

p = qué cara uso (triángulos = 3 / cuadrados = 4 / pentágonos =5)

q = cuántas caras (o aristas) en cada vértice

Caras, vértices, aristas (y demás familia)

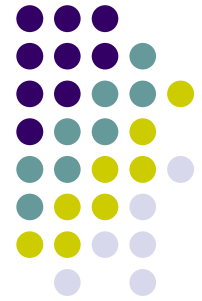


	p	q	V	A	C	V-A+C			
tetraedro	3	3	4	6	4	2			
cubo	4	3	8	12	6	2			
octaedro	3	4	6	12	8	2			
dodecaedro	5	3	20	30	12	2			
icosaedro	3	5	12	30	20	2			

p = qué cara uso (triángulos = 3 / cuadrados = 4 / pentágonos =5)

q = cuántas caras (o aristas) en cada vértice

Caras, vértices, aristas (y demás familia)

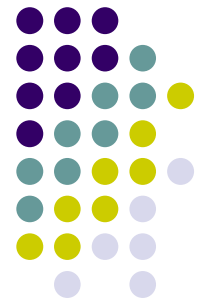


	p	q	V	A	C	V-A+C	p x C	q x V	2 x A
tetraedro	3	3	4	6	4	2			
cubo	4	3	8	12	6	2			
octaedro	3	4	6	12	8	2			
dodecaedro	5	3	20	30	12	2			
icosaedro	3	5	12	30	20	2			

p = qué cara uso (triángulos = 3 / cuadrados = 4 / pentágonos =5)

q = cuántas caras (o aristas) en cada vértice

Caras, vértices, aristas (y demás familia)



	p	q	V	A	C	V-A+C	p x C	q x V	2 x A
tetraedro	3	3	4	6	4	2	12	12	12
cubo	4	3	8	12	6	2	24	24	24
octaedro	3	4	6	12	8	2	24	24	24
dodecaedro	5	3	20	30	12	2	60	60	60
icosaedro	3	5	12	30	20	2	60	60	60

p = qué cara uso (triángulos = 3 / cuadrados = 4 / pentágonos =5)

q = cuántas caras (o aristas) en cada vértice

Caras, vértices, aristas (y demás familia)



	p	q	V	A	C	V-A+C	p x C	q x V	2 x A
tetraedro	3	3	4	6	4	2	12	12	12
cubo	4	3	8	12	6	2	24	24	24
octaedro	3	4	6	12	8	2	24	24	24
dodecaedro	5	3	20	30	12	2	60	60	60
icosaedro	3	5	12	30	20	2	60	60	60

← Número de simetrías directas de cada poliedro regular

p = qué cara uso (triángulos = 3 / cuadrados = 4 / pentágonos =5)

q = cuántas caras (o aristas) en cada vértice

Fin



Muchas gracias